

# ACCROISSEMENT STOCHASTIQUE DE LA RÉOLUTION SPATIALE DES TRACEURS GÉOPHYSIQUES DE L'OCÉAN : APPLICATION AUX OBSERVATIONS SATELLITAIRES DE LA TEMPÉRATURE DE SURFACE DE L'OCÉAN

Brahim Boussidi<sup>1</sup>, Ronan Fablet<sup>1</sup>, Emmanuelle Autret<sup>2</sup>, Bertrand Chapron<sup>2</sup>

1 : Télécom Bretagne, Dépt Signal & Communications, UMR LabSTICC, Technopôle Brest Iroise, CS 83818  
29238 Brest cedex 3, France  
{brahim.boussidi, ronan.fablet}@telecom-bretagne.eu

2 : Laboratoire d'Océanographie Spatiale, Ifremer - Centre Bretagne- BP 70 - 29280 Plouzané, France  
{bertrand.chapron, emmanuelle.autret}@ifremer.fr

## Résumé

Le développement des capteurs satellitaires d'observation des traceurs géophysiques à la surface de l'océan et les algorithmes de traitement associés ont connu un essor important au cours des vingt dernières années. Les différents capteurs satellitaires disponibles présentent des résolutions spatiales et temporelles différentes ainsi que différents niveaux de sensibilité à la couverture nuageuse. Dans le cas des images de température de surface de la mer, ceci se traduit notamment par de forts taux de données manquantes dans les observations de très haute-résolution (de l'ordre de  $1 \text{ km} \times 1 \text{ km}$ ) contrairement aux observations de basse-résolution (de l'ordre de  $25 \text{ km} \times 25 \text{ km}$ ). Il existe donc un enjeu fort pour exploiter conjointement les différentes sources d'information disponibles. Dans ce contexte, nous proposons un nouveau modèle stochastique de super-résolution basé sur une augmentation réaliste de l'information texturale des images. L'originalité de ce modèle réside dans la formulation d'a priori stochastiques sur la géométrie des images, qui sont caractéristiques des textures associées aux champs géophysiques à la surface de l'océan. Formellement, ce modèle consiste à modéliser les lignes de niveau de l'image comme des réalisations de marches aléatoires. Ce modèle stochastique s'étend naturellement à la simulation d'images haute-résolution à partir d'une observation basse-résolution. Cet article décrit la formulation mathématique du modèle proposé, ses caractéristiques théoriques ainsi que le schéma numérique mis en œuvre pour la super-résolution d'images texturées. L'application à la simulation haute-résolution de champs de température de surface de la mer dans une région active de l'océan (courant des Aiguilles) démontre sa pertinence dans le contexte applicatif de la télédétection satellitaire de l'océan. Nous en discutons également les principales contributions ainsi que les différentes extensions possibles.

**Mots clés :** Super-résolution, géométrie des textures, processus d'Ornstein-Uhlenbeck, dynamiques turbulentes des océans, température de surface de la mer.

## Abstract

*The development of both satellite sensors for the remote observation of geophysical tracers at the ocean surface, and associated processing algorithms has significantly improved over the last twenty years. Available satellite sensors have several spatial and temporal resolutions as well as different sensitivities to weather conditions, especially the cloud cover. For instance, regarding sea surface temperature (SST), high rates of missing data may occur in high-resolution infrared observations (of the order of  $1 \text{ km} \times 1 \text{ km}$ ) unlike low-resolution microwave observations (the  $25 \text{ km} \times 25 \text{ km}$  order). There is therefore a strong challenge in exploiting jointly different information sources to reconstruct consistent high-resolution geophysical fields. In this context, we propose a new stochastic texture model. The originality of this model lies in the formulation of stochastic priors on the geometry of textured images, which is known to be a key feature of the textures associated with geophysical field. This model formally views image contour lines as realizations of planar random walks. Given low-resolution observation images, this stochastic model naturally extends to the conditional simulation of high-resolution observations. This paper describes the mathematical formulation of the proposed model, its theoretical characteristics and the proposed numerical implementation. The application to the stochastic super-resolution of SST fields in an active ocean region, namely the Agulhas current, proves its relevance for ocean sensing applications. We also discuss the main contributions and the various possible extensions.*

**Keywords :** Super-resolution, texture geometry, orientation field, Ornstein-Uhlenbeck process, ocean dynamics, sea surface temperature.

## 1. Introduction

L'accroissement de la résolution spatiale en télé-détection de la surface de l'océan (e.g., température de surface, courants de surface, couleur de l'eau, salinité de surface,...) constitue un enjeu majeur pour mieux caractériser les dynamiques de l'océan aux petites échelles, dynamiques qui jouent un rôle primordial dans la compréhension des dynamiques globales et également du forçage opéré par les dynamiques physiques sur les dynamiques biogéochimiques et écologiques des systèmes marins (Chaigneau et al., 2011). Dans ce contexte, les dernières décennies ont vu émerger de nouveaux capteurs (e.g., capteurs micro-onde, infra-rouge) qui présentent des résolutions spatio-temporelles différentes ainsi que des niveaux de sensibilité différents à la couverture nuageuse (Borgne et al., 2007; Wentz et al., 2000). A titre d'exemple les observations satellitaires de la température de surface par des capteurs micro-onde présentent des résolutions spatiales de l'ordre de  $25 \text{ km} \times 25 \text{ km}$  pour les latitudes tempérées et sont peu sensibles à la couverture nuageuse. A l'inverse, les capteurs infra-rouge fournissent des observations de haute-résolution (de l'ordre de quelques kilomètres) mais sont généralement associées à un pourcentage important de données manquantes du fait de la présence de nuages. La capacité à tirer pleinement parti des différentes modalités d'observation disponibles pour produire des champs d'observation haute-résolution constitue donc un enjeu majeur, mais reste un problème ouvert. De manière générale, les approches proposées exploitant des techniques d'assimilation variationnelle (Ba et al., 2013) ou d'interpolation optimale (Hoyer and Shea, 2007) qui se traduit par l'application d'opérateurs de filtrage spatio-temporel ne peuvent reconstruire de manière réaliste les structures de haute-résolution, en particulier les informations de texture, lorsque les taux de données manquantes sont élevés.

De manière générale, pour traiter ce problème de fusion multi-résolution d'observations satellitaires, il est en premier lieu nécessaire de développer des modèles exprimant les relations entre les observations conjointes à basse et haute résolution d'un même champ géophysique à la surface de l'océan. Dans ce contexte, cet article vise à exprimer, dans un formalisme probabiliste, des relations théoriques, aussi bien qu'empiriques, qui lient deux observations satellitaires uni-modales sur la surface de l'océan à deux échelles différentes.

Du fait de la nature turbulente des dynamiques de l'océan, les champs géophysiques sont caractérisés à haute-résolution par leurs caractéristiques texturales, qui ont notamment fait l'objet d'études en termes de processus fractals (Bernard et al., 2006; Ba et al., 2012). Les informations texturales sont naturellement modélisées dans un cadre probabiliste (Freeman and Liu, 2011).

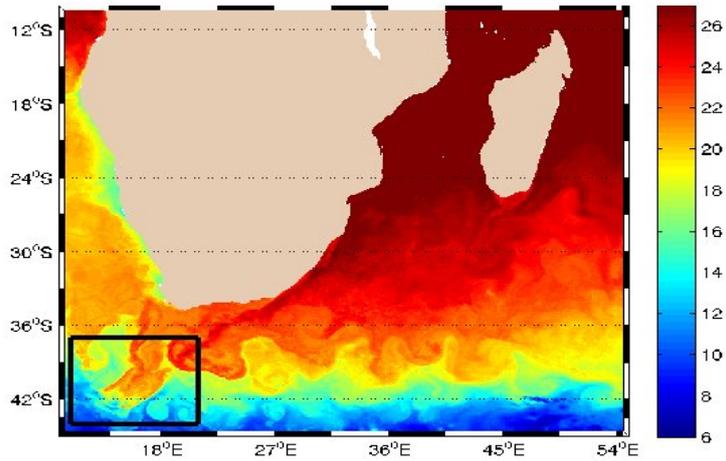
La problématique posée ici peut donc être vue comme un problème de super-résolution de champs géophysiques à haute-résolution conditionnellement à une ob-

servation basse-résolution en exploitant des caractéristiques texturales. L'approche proposée repose sur la définition de modèles probabilistes conditionnels associés. L'originalité principale de cet article est d'introduire de nouveaux modèles stochastiques de super-résolution d'images texturées qui reposent sur la prise en compte explicite des caractéristiques des régularités géométriques locales. Ces modèles se basent sur la généralisation de processus de type marche aléatoire, processus autorégressif d'ordre 1 appliqué à l'orientation locale des contours, à la modélisation du champ des orientations locales à haute résolution. Par orientation locale, nous entendons la direction locale des lignes de niveaux de l'image. En effet, l'analyse de ces lignes exhibe des fluctuations géométriques autour d'une direction tendancielle, qui peuvent être interprétées en termes de variance d'une perturbation aléatoire. De manière formelle, les processus dits d'Ornstein-Uhlenbeck semblent être de bons candidats pour exprimer ces caractéristiques géométriques. La super-résolution statistique de champs géophysiques à haute-résolution est alors définie dans un cadre variationnel comme la génération d'une image haute-résolution contrainte par un champ d'orientation simulé conditionnellement à une observation basse-résolution. Cet article est organisé comme suit : Nous présentons dans un premier temps le modèle stochastique de synthèse de texture conditionnellement à des contraintes géométriques ainsi que des analyses de simulations (Section 3). L'application de ce modèle à la super-résolution de champs géophysiques est donnée en Section 4 ainsi qu'une discussion des principales caractéristiques du modèle proposé et des extensions envisagées dans le cadre de nos futurs travaux.

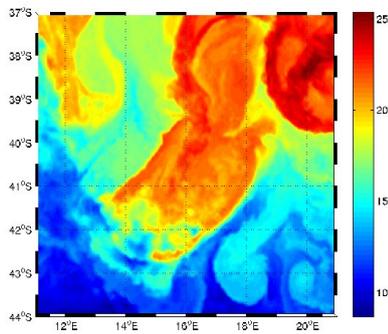
## 2. Contexte et état de l'art

Les observations satellitaires de champs géophysiques 2D scalaires (e.g., température, couleur, salinité,...) à la surface de l'océan mettent en évidence des caractéristiques texturales de ces champs qui sont directement associées aux dynamiques turbulentes sous-jacentes (Figure 1). Différents travaux récents, à la fois pour des simulations numériques de modèles classiques de turbulence (Bernard et al., 2006) et à partir d'observations satellitaires de champs géophysiques (Ba et al., 2012), ont mis en évidence l'existence de signatures géométriques, en particulier en termes de régularité des iso-niveaux des champs géophysiques 2D, caractéristiques de ces types de textures. Ces éléments motivent l'approche développée ici qui vise à proposer des modèles de super-résolution statistique de champs géophysiques exploitant explicitement des contraintes sur la géométrie des textures haute-résolution simulées.

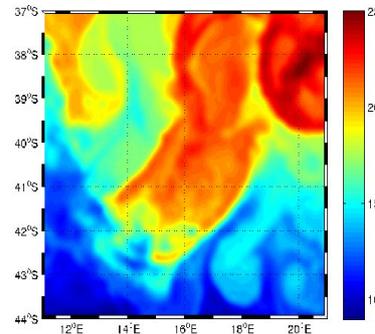
L'analyse et la synthèse des textures visuelles sont des thèmes de recherche extrêmement actifs depuis plusieurs décennies. Les avancées réalisées depuis une dizaine d'années ont conduit à une amélioration significative des techniques de synthèse de texture. On peut



(1)



(2)



(3)

**FIGURE 1 :** (1) Observations satellitaires de la température de surface de l'océan pour la région du Courant des Aiguilles située le long de l'extrême sud-est du continent africain avec un zoom sur une zone d'intérêt (2) Image haute-résolution de la région d'intérêt à une résolution d'environ 2 km×2 km (données Ifremer, Odyssea) (3) Image basse-résolution correspondant à une version sous-échantillonnée à une résolution de 16 km × 16 km de l'image précédente.

notamment citer les méthodes qui se basent sur les champs de Markov (Freeman and Liu, 2011), généralisation des modèles auto-régressifs, dont le principe consiste à définir en chaque pixel des lois conditionnelles par simple connaissance de ce qui se passe sur le voisinage.

On peut également mentionner les approches dites basées "exemple" (Freeman et al., 2002), ou encore les méthodes par "patch" (Efros and Freeman, 2001), ou encore des avancées récentes basées sur des représentations aléatoires des phases de la transformée de Fourier de l'image (Galerne et al., 2011). En dépit de leurs performances en termes de synthèse de textures visuelles, ces modèles se fondent sur la formulation de contraintes liées directement au champ scalaire et n'appréhendent pas explicitement la composante géométrique des textures. Cela les rend peu adaptées au contexte applicatif considéré ici, pour lequel la prise en compte d'a priori géométriques est recherchée.

Dans ce contexte, les cascades multiplicatives fournissent un cadre conceptuel intéressant pour aborder la synthèse de textures en intégrant des contraintes géométriques, notamment à travers le spectre multifractal (Barral and Mandelbrot, 2002; Chainais, 2007). Chainais et al. (2011) ont proposé une première application à la super-résolution de texture pour des applications à l'imagerie de la surface du soleil. Le modèle utilisé repose sur l'exploitation de propriétés d'invariance d'échelle observées sur les images considérées et exploite un modèle stochastique multifractal. Ce modèle n'exprime toutefois pas de conditionnement explicite des composantes haute-résolution vis-à-vis de l'observation basse-résolution.

Il en résulte notamment que les détails haute-résolution simulés sont stationnaires spatialement, hypothèse non-vérifiée pour les champs géophysiques dans des zones de frontogénèse comme considérés ici (Figure 1). On souhaite au contraire pouvoir appréhender le caractère non-stationnaire des structures mises en évidence à haute-résolution à travers le conditionnement par l'information observée à basse-résolution. On peut motiver cet objectif par deux observations simples concernant les dynamiques géophysiques considérées ici comme l'illustre la figure 1. Les zones frontales, i.e. de forts gradients du champ scalaire, sont associées à des forçages dynamiques importants en surface qui tendent à imposer de fortes régularités géométriques, et donc des contours marqués et longs. *A contrario*, dans les zones de faibles gradients du champ scalaire, le forçage physique horizontal est moindre et le champ géophysique scalaire présente davantage de variabilité géométrique aux petites échelles.

Sur la base de ces observations et des travaux antérieurs ayant démontré la pertinence de l'analyse des champs géophysiques à partir de leurs lignes de niveaux (Ba et al., 2013; Bernard et al., 2006), nous proposons ici d'étendre la modélisation des iso-niveaux pris individuellement comme des marches aléatoires (Bernard et al.,

2006) pour définir des modèles stochastiques 2D de textures intégrant explicitement des a priori sur la régularité géométrique des champs 2D simulés.

### 3. Synthèse de texture basée sur des contraintes géométriques

Le modèle proposé repose sur la modélisation des iso-niveaux de l'image comme des réalisations de marches aléatoires 2D. Nous introduisons dans un premier temps le modèle stochastique de marche aléatoire considéré (Section 3.1). Son extension à la synthèse de champ scalaire 2D fait intervenir une modélisation stochastique de la géométrie de l'image, à travers le champ des orientations locales de l'image (Section 3.2). Nous formulons alors la synthèse de l'image comme la synthèse d'une image contrainte par le modèle géométrique introduit (Section 3.3). Des exemples d'images simulées illustrent les propriétés géométriques du modèle proposé (Section 3.4).

#### 3.1. Modèle de marche aléatoire corrélée

Nous supposons que les lignes de niveau d'une image peuvent être modélisées comme des réalisations de marches aléatoires corrélées (Codling et al., 2007). Nous considérons plus spécifiquement un processus d'Ornstein-Uhlenbeck, défini dans sa formulation continue par l'équation différentielle stochastique (EDS) suivante :

$$d\theta(t) = -\gamma(\theta(t) - \theta_0)dt + \sigma dW(t), \quad (1)$$

où  $\theta(t)$  représente la direction du contour à l'instant  $t$ , paramétrée par rapport à l'horizontale.  $\theta_0$  correspond au biais directionnel de la trajectoire et  $W(t)$  est un mouvement brownien standard.  $\gamma$  et  $\sigma$  sont des paramètres positifs. Notons que l'introduction de ce type d'équation permet de voir la géométrie de ces courbes comme étant un signal continu. Une motivation de ce choix réside dans le fait que les trajectoires de ces processus possèdent des caractéristiques géométriques similaires à celles observées sur des vrais contours.

Un tel modèle est qualifié de retour à la moyenne car le processus  $\theta(t)$  tend vers sa moyenne directionnelle du fait du terme de rappel  $-\gamma(\theta(t) - \theta_0)$ . Il est à noter que d'autres formulations de ce terme de rappel peuvent être envisagées, par exemple des termes non-linéaires sinusoïdaux (Codling et al., 2007).

La mise en œuvre pratique de ce processus repose sur la discrétisation de l'équation continue (1). Nous considérons ici le schéma discret suivant :

$$\theta(t_0 + k\Delta t) = \alpha(\theta_0 + \frac{\sigma}{\gamma}\Delta t\tilde{W}(t_0 + k\Delta t)) + (1 - \alpha)\theta(t_0 + (k - 1)\Delta t), \quad (2)$$

où  $\alpha = (1 - \exp(-\gamma\Delta t))$ ,  $\Delta t$  est un incrément temporel, et  $\tilde{W}$  est un bruit blanc gaussien. Ici, on considère l'abscisse curviligne comme axe "temporel" de référence.

Compte tenu de l'ambiguïté liée à la nature intrinsèquement périodique des données d'orientations, caractériser les distributions de probabilité liées à ce type de processus nécessite un cadre statistique adapté, à savoir le cadre général des statistiques directionnelles (Mardia and Jupp, 1999). L'EDS d'Ornstein-Uhlenbeck considérée est associée à une représentation de type Fokker-planck (Codling et al., 2007) qui décrit la dynamique de la densité de probabilité de la variable d'état, ici l'orientation locale, en fonction de l'abscisse curviligne. La représentation Fokker-planck est donnée par une équation aux dérivées partielles :

$$\frac{\partial P(\theta, t)}{\partial t} = -\gamma \frac{\partial P(\theta, t)}{\partial \theta} + \frac{1}{2} \sigma^2 \frac{\partial^2 P(\theta, t)}{\partial \theta^2}, \quad (3)$$

où  $P(\theta, t)$  représente la distribution statistique des orientations locales à l'instant  $t$ , les paramètres  $\sigma$  et  $\gamma$  sont les mêmes définis dans l'équation (1). Cette représentation déterministe permet notamment de déterminer la distribution stationnaire de l'orientation locale pour le processus défini par l'équation (1), i.e. la distribution théorique de l'orientation le long des réalisations de la marche aléatoire corrélée. Il s'agit ici d'une loi normale (restreinte dans le cercle unité), de moyenne  $\theta_0$  et de variance  $\gamma^2 \sigma^2$ . Ces statistiques montrent clairement que la régularité géométrique des trajectoires simulées relativement à la direction moyenne  $\theta_0$  est complètement contrôlée par les paramètres  $\gamma$  et  $\sigma$ .

### 3.2. Modèle stochastique de la géométrie des images

Dans ce qui précède, nous avons présenté un modèle stochastique de la géométrie des iso-lignes d'une image, chaque iso-ligne étant considérée individuellement. Dans un champ scalaire représenté par ses lignes de niveau, la structure géométrique sous-jacente est invariante par changement de contraste (Monasse and Guichard, 2000). Néanmoins les géométries des différentes iso-lignes sont évidemment inter-dépendantes, et le modèle défini par l'EDS (Equation 1) ne peut s'appliquer directement.

Dans cette section, nous généralisons notre approche à travers la modélisation stochastique du champ des orientations locales d'une image. Le champ des orientations locales définit la géométrie locale d'une image, puisque les iso-lignes d'une image sont des courbes localement tangentes en tout point à ce champ d'orientations. Notre objectif est de prendre en considération les dépendances mutuelles entre iso-lignes, sous contrainte qu'une restriction sur une iso-ligne corresponde à une marche aléatoire décrite par le processus d'Ornstein-Uhlenbeck (Equation 1).

La prise en compte conjointe de ces deux aspects est satisfaite en considérant un processus d'Ornstein-Uhlenbeck sur un champs 2D d'orientations décrit comme suit :

$$d\theta(p) = f(\theta(p), \theta_0(p)) dp + \sigma dW(p), \quad (4)$$

où  $\theta_p$  est l'orientation locale au pixel  $p$ ,  $f(\theta(p), \theta_0(p))$  représente un terme de rappel linéaire, similaire à celui de l'équation (Equation 1), et  $W$  une surface brownienne. Nous verrons qu'on peut, à l'aide d'une telle représentation, générer un champs 2D dont les fluctuations autour d'un champs référentiel sont contrôlées par les paramètres  $\sigma$  et  $\gamma$ .

Pour prendre en considération le caractère non stationnaire de la géométrie des textures, on peut de plus envisager de faire varier spatialement les paramètres du modèle. En jouant sur ce point, notre approche peut couvrir un spectre très large de textures représentant des comportements plus réalistes.

### 3.3. Synthèse sous contraintes géométriques

Le modèle de synthèse d'images proposé consiste à générer un champ scalaire dont la géométrie est celle induite par le modèle stochastique de champs d'orientations (Equation 4).

Cela peut être reformulé comme suit :

$$\begin{cases} d\theta(p) = -\gamma(\theta(p) - \theta_0(p)) dp + \sigma dW(p) \\ \langle n_{\tilde{I}}(p), u_{\theta}(p) \rangle = 0, \forall p \end{cases} \quad (5)$$

où  $n_{\tilde{I}}$  est le vecteur normal à la ligne de niveau passant par le pixel  $p$  (la direction du gradient local de l'image),  $u_{\theta}(p)$  est le vecteur unitaire orienté suivant l'angle  $\theta(p)$ . Cela revient, en partant d'une image initiale  $I_0$  et une fois obtenu un champ d'orientations, à reconstruire des lignes de niveaux qui lui serait partout tangentes. Ce problème peut être posé en terme de minimisation d'une fonctionnelle d'énergie :

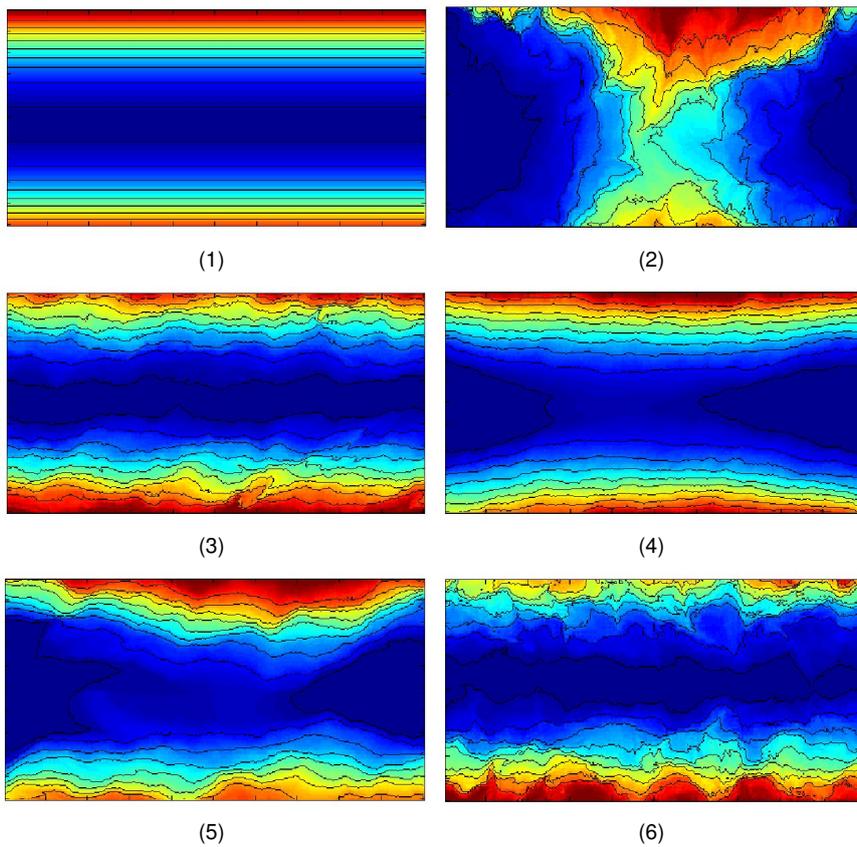
$$\mathcal{J}(I) = \int \|\langle \nabla I(p), u_{\theta}(p) \rangle\| dp, \quad (6)$$

Ainsi, la mise en œuvre de la méthode considérée se décompose en deux étapes :

- La simulation d'un champ d'orientations qui consiste à intégrer l'EDS (Equation 4) en utilisant un schéma numérique particulier basé sur une stratégie de parcours aléatoire de l'image. En chaque pixel, on choisit aléatoirement une direction d'intégration, verticale ou horizontale, puis on intègre l'équation 1 suivant la direction sélectionnée.
- La simulation du champ scalaire  $\tilde{I}$  repose sur la résolution numérique du problème variationnel (Equation 6), Nous utilisons un algorithme de moindres carrés pondérés itérés, l'initialisation étant donnée par une image  $I_0$ . Ce schéma numérique est adapté à celui proposé dans (Fablet et al., 2008) pour une fonctionnelle variationnelle similaire.

Formellement, ces deux étapes peuvent être résolues par le système d'équations suivant :

$$\begin{cases} d\theta(p) = -\gamma(\theta(p) - \theta_0(p)) dp + \sigma dW(p) \\ \tilde{I} = \arg \min_I \int \|\langle \nabla I(p), u_{\theta}(p) \rangle\| dp \end{cases} \quad (7)$$



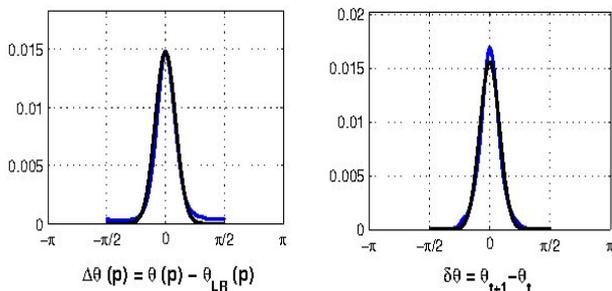
**FIGURE 2** : Exemples de simulations du modèle proposé après (1) initialisation, pour différents jeux de paramètres : (2)  $\gamma = 0,005$ ,  $\sigma = 0,4$  – (3)  $\gamma = 0,2$ ,  $\sigma = 0,3$  – (4)  $\gamma = 0,6$ ,  $\sigma = 0,3$  – (5)  $\gamma = 0,1$ ,  $\sigma = 0,2$  – (6)  $\gamma = 0,1$ ,  $\sigma = 0,4$ .

### 3.4. Exemples de simulation du modèle proposé

Pour illustrer les caractéristiques du modèle proposé, nous fournissons des exemples de champs simulés pour différents jeux de paramètres ( $\sigma$  et  $\gamma$ ) en considérant une même image initiale de géométrie simple dont le champ d'orientations est partout nul (i.e.  $\theta_0(p) = 0, \forall p$ ). Cela correspond à une image dont les lignes de niveau sont horizontales. Comme illustré dans la Figure 2, les propriétés théoriques attendues sont validées par des simulations. En effet, en présence d'une même amplitude de bruit, la déformation de la forme globale des lignes de niveau varie en fonction du terme de rappel. Un coefficient de rappel  $\gamma$  faible permet de générer davantage d'oscillations. Au contraire, un coefficient de rappel  $\gamma$  élevé impose aux lignes de niveau de l'image de suivre la géométrie de l'image basse-résolution. De manière complémentaire, l'amplitude des perturbations aléatoires paramétrée par la variance du bruit  $\sigma$  contraint les fluctuations à petites échelles.

Ces simulations mettent clairement en évidence la capacité du modèle à générer une large gamme de configurations en termes de caractéristiques géométriques des lignes de niveaux, ce dont nous tirons parti ici pour la super-résolution de champs géophysiques.

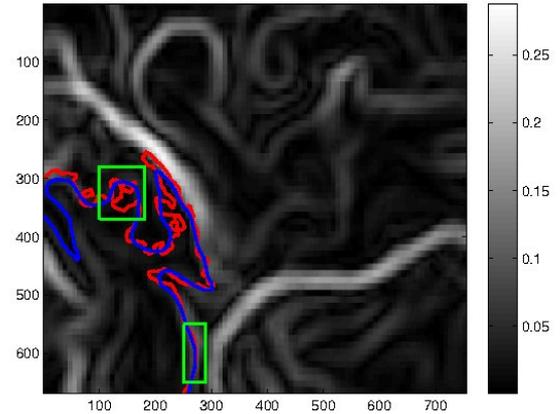
Il peut également être souligné que les marginales des champs d'orientations simulés correspondent bien aux lois théoriques stationnaires associées à l'équation de Fokker-Planck (Figure 3).



**FIGURE 3 :** Les distributions statistiques des orientations inter-échelles (gauche) et celles des incréments le long des iso-lignes (droite) d'une image simulée en utilisant la paramétrisation suivante :  $\gamma = 0,6$  et  $\sigma = 0,3$  (Figure 2.3) sont confrontées aux distributions théoriques. Les distributions empiriques sont visualisées en bleu et celles théoriques en noir.

## 4. Application à la super-résolution statistique conditionnelle de champs géophysiques haute-résolution

Nous présentons dans cette section l'application du modèle stochastique de synthèse d'images présenté



**FIGURE 4 :** Illustration du conditionnement de la régularité géométrique à haute-résolution par le champ des gradients à basse-résolution : champ représenté en niveau de gris, d'un zoom de l'image basse résolution donnée en Figure 1, lignes de niveau observées à basse (bleu) et haute (rouge) résolution. Les deux zones encadrées permettent d'illustrer deux dynamiques différentes : dynamique contrainte en présence de gradient fort (rectangle en bas) et dynamique non contrainte qui correspond à des faibles gradients (rectangle en haut).

dans la section précédente à la simulation d'observation de haute-résolution de champs géophysiques, étant donné une observation basse-résolution. A travers le modèle stochastique proposé, l'objectif est de contrôler les caractéristiques géométriques des images haute-résolution simulées. Nous introduisons tout d'abord les notations mathématiques nécessaires pour aborder cette problématique de super-résolution. Nous présentons ensuite la mise en œuvre pratique de la méthode proposée.

L'efficacité de la méthode est testée à travers une étude qualitative et quantitative réalisée sur des images réelles de la température de surface.

### 4.1. Modèle proposé

Nous introduisons en premier lieu les conventions de notation suivantes. L'image haute-résolution est notée  $I_{HR}$ . Cette image est de dimension  $N \times M$ . Nous notons  $I_{LR}$  sa version basse-résolution de dimension  $(N/K \times M/K)$ , il s'agit de la version sous-échantillonnée d'un facteur  $K$  de l'image haute-résolution  $I_{HR}$ . Cette opération de sous-échantillonnage est associée à un opérateur de projection  $\mathcal{P}$  défini de manière formelle comme suit :

$$\begin{cases} \mathcal{P} : \mathcal{M}_{(N,M)} \rightarrow \mathcal{M}_{(N/K,M/K)} \\ \mathcal{P}[I_{HR}] = I_{LR} \end{cases} \quad (8)$$

où  $\mathcal{M}_{(n,m)}$  représente l'espace des matrices de taille  $(n, m)$ . Nous notons  $\mathcal{P}^*$  l'opérateur réciproque qui permet de reconstruire une image à la résolution  $N \times M$

à partir d'une version basse-résolution. Nous supposons que ces opérateurs vérifient la propriété suivante :

$$\mathcal{P}[I - \mathcal{P}[I]] = 0. \quad (9)$$

Cette propriété garantit que l'espace des images basse-résolution  $\mathcal{P}[I]$  est orthogonal à l'espace des détails haute-résolution  $I - \mathcal{P}[I]$ . Cette propriété d'orthogonalité est par exemple vérifiée par des opérateurs de sous-échantillonnage dans le domaine de Fourier. Comme décrit plus loin, nous considérons ici des opérateurs de projection associés à des décompositions en ondelettes discrètes qui vérifient également cette propriété d'orthogonalité.

Le modèle de super-résolution proposé repose sur une formulation implicite de la distribution conditionnelle  $P(I_{HR}|I_{LR})$  de l'image haute-résolution  $I_{HR}$  conditionnellement à l'image basse-résolution  $I_{LR}$ . L'application de ce modèle consiste alors à échantillonner cette distribution conditionnelle. Formellement, le modèle proposé introduit une variable complémentaire, le champ des orientations locales à haute-résolution  $\Theta = \{\theta(p)\}$  et est défini comme suit :

$$\begin{cases} d\theta(p) = -\gamma(p) (\theta(p) - \theta_{LR}(p)) dp + \sigma(p)dW(p) \\ \tilde{I} = \arg \min_I \int \|\nabla I(p), u_\theta(p)\| dp \\ s.c \quad I_{LR} = \mathcal{P}[\tilde{I}] \end{cases} \quad (10)$$

où  $\Theta_{LR} = \{\theta_{LR}(p)\}$  est le champ des orientations locales de l'image basse-résolution.

Pour prendre en compte le caractère non stationnaire de la géométrie, les paramètres  $\gamma$  et  $\sigma$  peuvent varier spatialement de telle sorte à contrôler localement la régularité géométrique de l'image haute-résolution.

Comme souligné ci-dessus, l'analyse qualitative des observations réelles haute-résolution des champs géophysiques à la surface de l'océan, en particulier des images de température de surface, suggère un conditionnement de la régularité géométrique des iso-lignes vis-à-vis de la norme du gradient local de la manière suivante :

- les régions de faible gradient sont associées à une plus forte variabilité des orientations locales à haute-résolution ;
- *a contrario*, les régions de fronts marqués (gradient fort) exhibe une variabilité moindre des orientations locales autour de la direction locale principale.

Ces propriétés peuvent être observées sur l'illustration donnée en Figure 3.

Nous introduisons donc un conditionnement du modèle stochastique (Equation 10) à travers les paramètres  $\sigma$  et  $\gamma$  de la manière suivante : Dans les régions de fort gradient, le champ des orientations locales à haute-résolution doit être fortement contraint par le champ d'orientation à basse-résolution. Au contraire, le modèle autorise des variabilités inter-échelle plus fortes dans les

zones de faible gradient. Ceci se traduit par la paramétrisation des champs  $\sigma$  et  $\gamma$  comme des fonctions du gradient de l'observation basse-résolution :

$$\begin{cases} \gamma(p) = \gamma_0 \|\nabla I_{LR}(p)\|^\nu \\ \sigma(p) = \sigma_0 \|\nabla I_{LR}(p)\|^{-\beta} \end{cases} \quad (11)$$

où  $\gamma_0$ ,  $\sigma_0$ ,  $\mu$  et  $\beta$  sont des paramètres positifs.

Vis-à-vis de l'équation stochastique, cela correspond à un terme de rappel moins fort et un bruit gaussien plus important dans les régions de faible gradient. Inversement, le terme de rappel est plus fort et le bruit gaussien est de plus faible amplitude dans les zones de fort gradient ce qui permet d'imposer plus de régularité géométrique.

## 4.2. Résolution numérique

La résolution numérique de l'approche proposée comporte deux étapes :

- La simulation du champ d'orientations haute-résolution  $\Theta_{HR}$  conditionnellement au champ d'orientations basse-résolution  $\Theta_{LR}$  ;
- La génération de l'image haute-résolution  $I_{HR}$  comme la solution de la minimisation de la fonctionnelle variationnelle (6) sous contrainte de projection  $\mathcal{P}[I] = I_{LR}$ .

Cette minimisation est réalisée de manière incrémentale par une descente de gradient. A l'itération  $k$ , la solution courante  $I^{(k+1)}$  est donnée par :

$$I^{(k+1)} = I^{(k)} - \alpha \nabla \mathcal{J}(I^{(k)}), \quad (12)$$

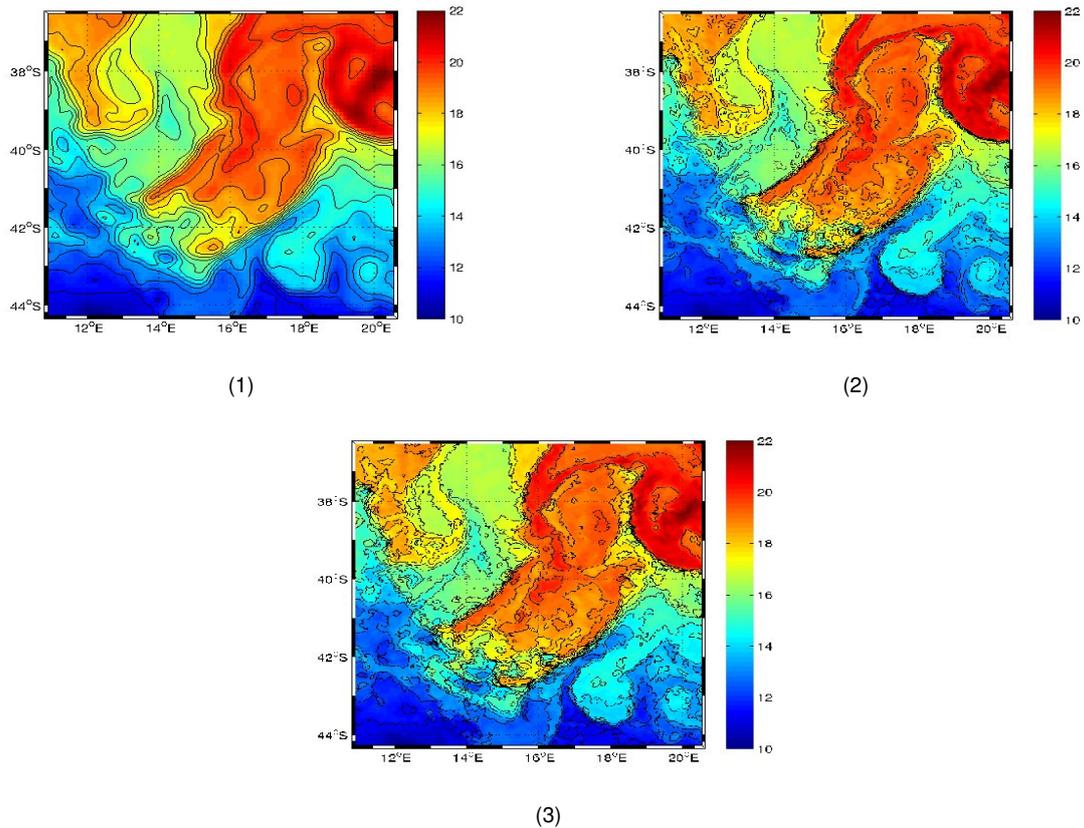
où  $\nabla \mathcal{J}(I^{(k)})$  est le gradient de la fonctionnelle variationnelle calculé en  $I^{(k)}$  et  $\alpha$  représente le pas d'apprentissage. Cette équation peut être aussi notée comme suit :

$$I^{(k+1)} = I^{(k)} + \delta(I^{(k)}). \quad (13)$$

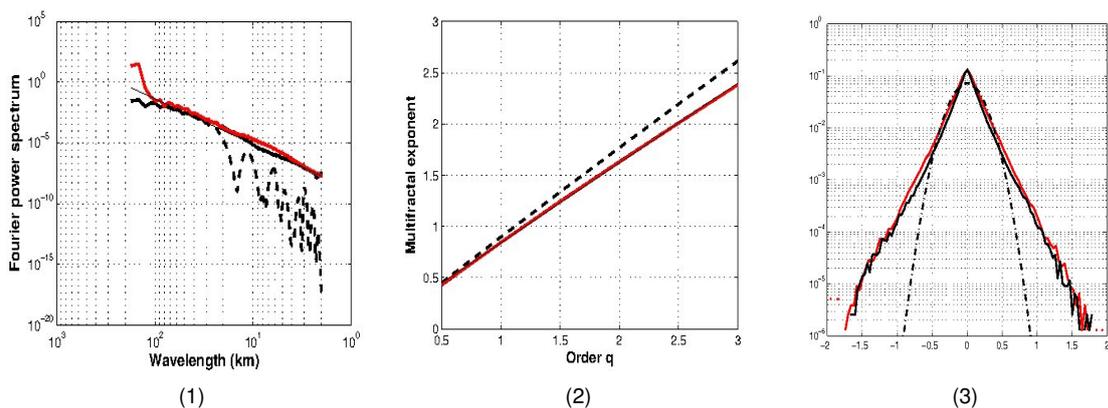
$\delta(I^{(k)})$  représente l'incrément que l'on ajoute à l'itération  $k$ . Le fait de ne prendre en compte que la partie orthogonale au projecteur basse-résolution  $\delta(I^{(k)}) - P[\delta(I^{(k)})]$  garantit le respect de la contrainte de projection  $P[I^{(k)}] = I_{LR}$ . L'initialisation de ce schéma numérique est donnée par l'image basse-résolution :  $I^{(0)} = I_{LR}$ . Le calcul numérique du gradient  $\nabla \mathcal{J}(I^{(k)})$  repose sur la discrétisation de la fonctionnelle variationnelle suivant un schéma numérique similaire à celui considéré dans (Fablet et al., 2008).

## 4.3. Application à des observations satellitaires la de température de surface de la mer

Les images correspondent ici à des zones de  $10^\circ \times 10^\circ$  (environ  $1000 \text{ km} \times 1000 \text{ km}$ ) dans la région du Courant des Aiguilles (Afrique de Sud), une région où l'activité frontale est l'une des plus importantes au niveau global (Bryden et al., 2005). Nous travaillons sur des données de température de surface interpolées spatialement à une résolution d'environ  $0,02^\circ$  ( $\sim 2 \text{ km} \times 2 \text{ km}$ ).



**FIGURE 5 :** Application à des observations satellitaires de la température de surface de l’océan, (1) image basse-résolution, (2) image haute-résolution, (3) image haute-résolution simulée en considérant la paramétrisation suivante  $\nu = 0,54$ ,  $\beta = 0,13$ ,  $\gamma_0 = 2,14$ . Pour chaque image, nous visualisons également un ensemble de lignes de niveau pour illustrer les caractéristiques géométriques des images.



**FIGURE 6 :** Evaluation quantitative de la méthode proposée, (4) densité spectrale radiale des images, (5) spectres multi-fractals, (6) distributions marginales de l’image des détails  $I - I_{LR}$ . Dans les trois figures ces quantités sont représentées respectivement en (noir,-) pour l’image réelle, en (rouge,-) pour l’image simulée et en (Noir,- -) pour l’image basse résolution. Pour illustrer le caractère non-gaussien de l’incrément, une distribution normale de même variance que  $I_{HR} - I_{LR}$  est également visualisée.

Ces données sont issues de l'analyse de référence Française qui est fournie par l'Ifremer. Celle-ci est appelée ODYSSEA et est produite de façon journalière à partir d'une dizaine de capteurs observant la SST. Ces données sont accessibles sur la page internet suivante : <http://hrdds.ifremer.fr/>. Nous utilisons ces données haute-résolution pour évaluer le modèle proposé dans sa capacité à simuler des champs de température haute-résolution réalistes à partir d'une version basse-résolution. Ces versions basse-résolution sont générées en appliquant des opérateurs de projection respectant la propriété d'orthogonalité. Nous considérons ici des opérateurs de sous-échantillonnage en  $K = 2^L$ , donnés par des transformées en ondelettes dyadiques (Mallat, 2008). En particulier, nous utilisons les analyses multi-résolution par coifflets (à 4 moments nuls), et nous fixons le nombre de décomposition à 4, ce qui correspond à des champs avec une résolution d'environ  $16 \text{ km} \times 16 \text{ km}$ . Etant donné une observation basse-résolution (Figure 5.1), notre objectif consiste à générer des images à une résolution de  $2 \text{ km} \times 2 \text{ km}$  en exploitant la méthode décrite précédemment. Du point de vue numérique, la simulation de l'image haute-résolution correspond à un problème d'optimisation, par descente de gradient, sous contrainte de projection dans une décomposition dyadique par ondelettes. Ceci revient à modifier à chaque itération les coefficients de cette décomposition et la contrainte de projection consiste à ne modifier que les coefficients de détails, alors que les coefficients d'approximation au niveau 4 sont donnés par ceux de l'image basse-résolution.

Les différents résultats expérimentaux illustrés ici sont obtenus avec les paramètres suivants :  $\nu = 0,54$ ,  $\beta = 0,13$ ,  $\gamma_0 = 2,14$ . Ces paramètres résultent d'une optimisation empirique permettant de produire des caractéristiques statistiques vis-à-vis des images haute-résolution réelles, notamment en termes de densités de probabilité marginales. Les résultats obtenus pour le champ de température illustré en Figure 1 sont donnés en Figure 5.3. Visuellement, ces images présentent des caractéristiques similaires aux images haute-résolution réelles. Elles ne semblent ni bruitées ni affectées par des artefacts. Au contraire, la structure géométrique des lignes de niveau paraît cohérente et présente des irrégularités visuellement réalistes. Ces images permettent de distinguer des structures petites échelles avec des fronts qui sont plus marqués et plus longs, et avec une variabilité plus importante par rapport à l'image basse résolution (cf. Figure 5.1).

Afin de valider ces observations qualitatives, nous menons également une étude quantitative (Figure 6) sur la base des caractéristiques des spectres de Fourier et des spectres multi-fractals (Chainais, 2007). L'analyse fréquentielle fournie par le spectre de Fourier permet de mettre en évidence l'apport d'énergie à haute-fréquence des images haute-résolution relativement à l'image basse-résolution. Alors que la méthode proposée n'impose aucune contrainte spécifique sur la forme du

spectre de Fourier, nous obtenons un comportement fréquentiel des détails simulés similaires aux images réelles (Figure 6.1). De la même manière, les caractéristiques multi-fractales des images simulées sont similaires à celles de l'image réelle (Figure 6.2). Ces résultats démontrent de manière quantitative que le modèle proposé permet de reconstruire des structures géométriques pertinentes d'un point de vue statistique vis-à-vis des images réelles. Il est également à noter que la méthode proposée n'impose aucune contrainte spécifique sur les spectres de Fourier et les spectres multi-fractals, mais uniquement sur le champ des orientations haute-résolution à travers l'équation (Equation 10). Nous interprétons la pertinence des simulations comme une mise en évidence de la pertinence du modèle proposé ainsi qu'une illustration du principe de cascade en échelles (Bernard et al., 2006; Chainais, 2007) qui conditionne les petites échelles aux grandes échelles. Ce principe de cascade résulte ici de la paramétrisation locale de l'équation stochastique régissant le champ d'orientations haute-résolution par la norme du gradient de l'image basse-résolution. Le modèle proposé permet également de reproduire une autre caractéristique importante des images haute-résolution : le caractère non-gaussien de l'incrément haute-résolution  $I_{HR} - I_{LR}$  (Newsam and Wegener, 1994). Comme illustré en Figure 6.3, cet incrément présente une queue de distribution plus lourde qu'une distribution gaussienne. Les images simulées reproduisent également cette distribution non-gaussienne. Ceci résulte également du fait que nous imposons des régularités différentes des lignes de niveau suivant le gradient à basse-résolution. La non-gaussianité de l'incrément  $I_{HR} - I_{LR}$  est donc ici implicitement contrôlée par la distribution des gradients à basse-résolution.

Afin de situer nos travaux, nous comparons les résultats obtenus avec d'autres modèles possibles permettant de traiter le problème de la super-résolution. Nous considérons ici deux modèles permettant de simuler directement le champ des détails  $I - I_{LR}$ . En premier lieu, le modèle proposé dans (Galerie et al., 2011) permet de simuler un champ aléatoire sous contrainte de respecter une densité spectrale 2D connue. La simulation du champ de détails consiste à appliquer une transformée de Fourier inverse d'un spectre 2D de Fourier, dont le module est pris comme celui d'une image d'apprentissage, et la phase est la réalisation de variables aléatoires i.i.d uniformes sur  $[0, 2\pi]$ . Cette méthode est appelée RPN (pour Random Phase Noise suivant la terminologie de (Galerie et al., 2011)).

Comme le montre la figure 7.4, les images simulées ne reproduisent pas des structures visuellement similaires aux images réelles. En particulier, elles semblent présenter une variabilité haute-résolution trop importante notamment dans les zones de fort gradient. L'analyse quantitative met également en évidence la capacité de ce modèle à respecter les contraintes spectrales. Toutefois,

ce type de modèles est asymptotiquement équivalent à un modèle de champ gaussien et ne peut donc représenter des distributions marginales non-gaussiennes comme l'illustre la figure 8.1.

Pour cibler ce caractère non-gaussien, des méthodes de simulation basées sur des transformations de champs gaussiens peuvent être envisagées. On peut montrer par exemple qu'en partant d'un champ gaussien  $f(t)$  la transformation donnée par l'équation ci-dessous permet la génération d'un champ  $\tilde{f}(t)$  dont la distribution marginale coïncide avec celle de données d'apprentissage, ici noté par  $F$ .

$$f(t) \rightarrow \tilde{f}(t) \triangleq F^{-1}(\phi(f(t))). \quad (14)$$

$\phi$  représente la fonction de répartition d'une loi normale centrée réduite et  $F^{-1}$  l'inverse généralisée de la fonction de répartition du champ d'apprentissage. Nous insistons sur le fait que seule la distribution des marginales est non gaussienne. Dans la suite, nous désignerons cette technique par méthode d'inversion. Les résultats d'une telle approche sont illustrés dans la figure 7.5. Bien que la méthode reproduise correctement la distribution marginale des champs simulés (Figure 8.1), la stationnarité et l'absence de structure du second ordre ont un impact considérable sur les propriétés spectrales (Figure 8.2). Ce qui offre moins de réalisme et beaucoup d'artéfacts aux images obtenues.

Du point de vue algorithmique, la minimisation variationnelle correspond à l'étape la plus coûteuse du modèle proposé. La mise en oeuvre considérée dans l'environnement Matlab permet de traiter des images de taille  $500 \times 500$  en un temps de l'ordre de la minute sur une architecture de type Intel Core Duo à 2,66 GHz.

## 5. Conclusion et perspectives

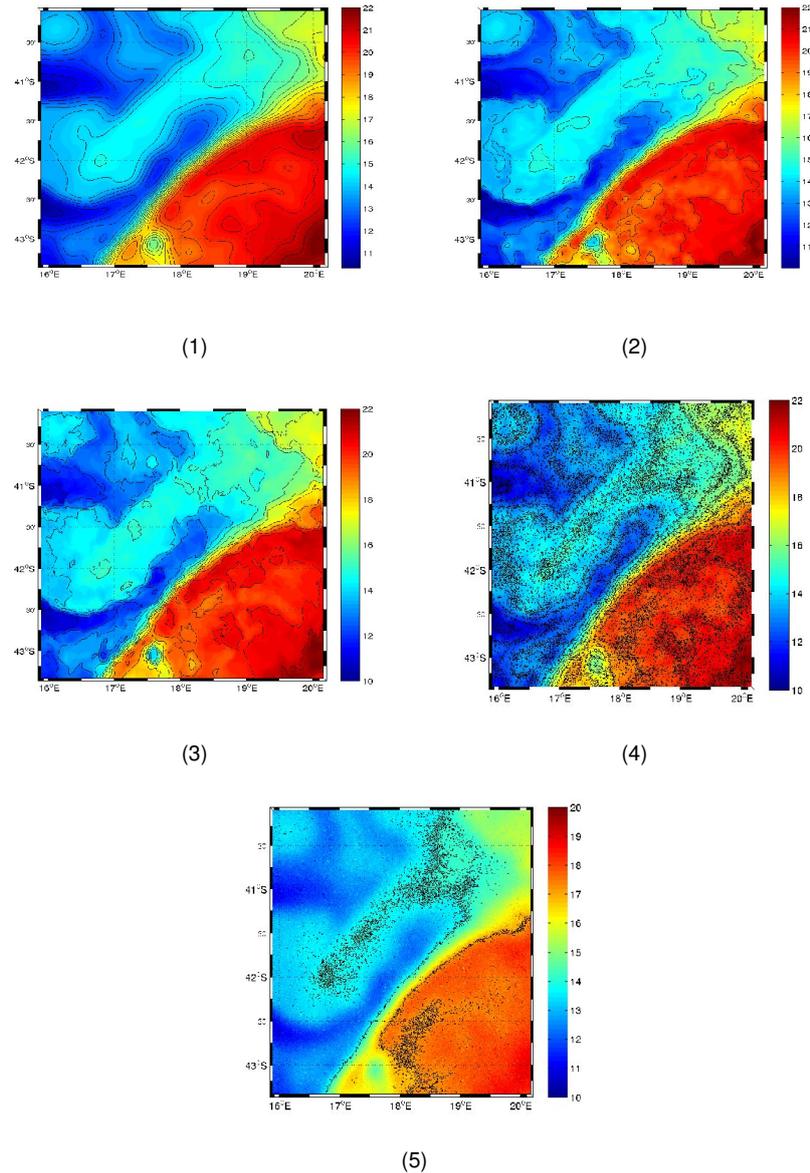
Nous avons dans cet article abordé la problématique de la super-résolution stochastique d'images satellitaires de l'océan en se basant sur des méthodes texturales exploitant des critères géométriques. Nous avons mis en évidence les limites des approches existantes et proposé une méthode d'amélioration de résolution spatiale grâce à une augmentation d'information reposant sur des critères de régularité géométrique. Cette procédure se base sur l'exploitation du conditionnement des détails haute-résolution vis-à-vis de l'observation basse-résolution. Nous avons formalisé ce conditionnement à travers la modélisation du champ des orientations locales d'une image haute-résolution par un processus d'Ornstein Uhlenbeck 2D. La paramétrisation de ce modèle dépend directement de l'observation basse-résolution, à travers la norme de son gradient. Cela nous permet de garder un contrôle sur l'aspect géométrique de l'image. Le problème de la super-résolution est ensuite posé dans un cadre variationnel comme la génération d'une image haute-résolution contrainte par un champ d'orientations simulé conditionnellement à

une observation basse résolution. L'évaluation de la méthode sur des données de température de surface a montré la pertinence statistique et physique des simulations issues du modèle proposé. Une extension de ce travail visera une adaptation spatio-temporelle de la méthode proposée afin de modéliser la dynamique temporelle de la géométrie des structures frontales. Du point de vue méthodologique, les travaux futurs visent à tester d'autres variantes du modèle proposé, notamment en utilisant des équations différentielles stochastiques dirigées par des champs browniens fractionnaires. Ce choix peut être intéressant vis-à-vis de la richesse des propriétés de rugosité qu'un tel processus peut générer. Dans un champ géophysique, ces propriétés peuvent être liées directement à la dynamique turbulente qui advecte les traceurs géophysiques. Outre les orientations locales aux contours, d'autres signatures de surface, caractérisant la géométrie, peuvent être considérées (e.g., la courbure), cela nécessitera une redéfinition du modèle considéré, notamment à travers son terme de rappel ainsi que l'introduction de nouvelles contraintes a priori.

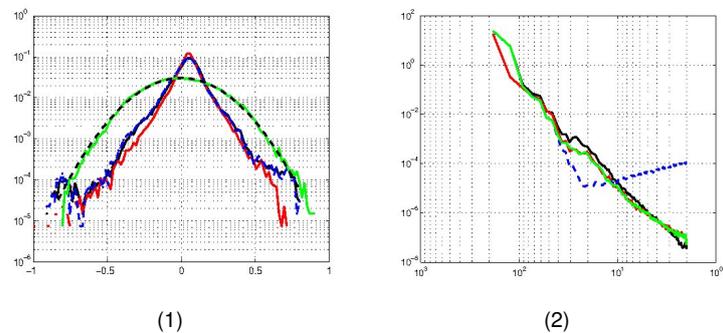
Du point de vue applicatif, nos travaux futurs porteront également sur l'application du modèle proposé à l'interpolation multi-résolution de données manquantes. Ce problème d'interpolation pourra être formulé comme un problème de super-résolution similaire à celui formulé par (Equation 10), en intégrant le fait que le champ d'orientations et l'image à haute-résolution sont partiellement connus. Sa résolution nécessitera principalement de proposer un schéma numérique adapté pour la simulation du champ des orientations à haute-résolution conditionnellement à l'image à basse-résolution et aux données non-manquantes à haute-résolution. L'un des bénéfices attendus de cette approche de super-résolution de données manquantes serait de compléter les méthodes classiques d'interpolation géostatistique ou variationnelle de champs géophysiques (Ba et al., 2013; Tandeo et al., 2011) en appréhendant et simulant la variabilité locale à haute-résolution. D'autres extensions possibles concernent des applications à des champs vectoriels, en particulier des champs de vitesse (champs de vent, champs de courant, ..).

## Références

- Ba, S., Autret, E., Chapron, B., Fablet, R., 2012. Statistical descriptors of ocean regimes from the geometric regularity of sea surface temperature observations. *IEEE Geosciences and Remote Sensing Letters* 9 (5), 851–855.
- Ba, S., Corpetti, T., Chapron, B., Fablet, R., 2013. Interpolation variationnelle de séquences multimodales d'images satellitaires de l'océan. *Traitement du Signal* 29(3-5), 433–440.
- Barral, J., Mandelbrot, B., 2002. Multiplicative products of cylindrical pulses. *Probab. Theory Relat. Fields* 124, 409–430.
- Bernard, D., Boffetta, G., Celani, A., Falkovich, G., 2006. Confor-



**FIGURE 7 :** (1) Image basse-résolution, (2) image haute-résolution, (3) image haute-résolution simulée par la méthode proposée, (4) image haute-résolution simulée par la méthode du RPN, (5) image haute résolution simulée par la méthode d'inversion.



**FIGURE 8 :** Comparaison quantitative des différentes méthodes, (1) distributions marginales des champs des détails, (2) densité spectrale radiale des images. Dans les deux figures les différentes quantités estimées sont représentées par (noir, -) pour l'image réelle, (vert, -) pour la méthode RPN, (bleu, -) pour la méthode d'inversion et (rouge, -) pour la méthode proposée dans cet article. Pour montrer le caractère gaussien des détails ajoutés par la méthode RPN, une distribution gaussienne est visualisée sur la même figure.

- mal invariance in two-dimensional turbulence. *Nature Physics* 2 (2), 176–189.
- Borgne, P. L., Legendre, G., Marsouin, A., 2007. Operational sst retrieval from metop/avhrr. In : EUMETSAT Meteorological Satellite Conference. Amsterdam, The Netherlands 24-28 September 2007.
- Bryden, H., Beal, M., Duncan, L., 2005. Structure and transport of the Agulhas Current and its temporal variability. *Journal of Oceanography* 61, 479–492.
- Byung, T. O., Jay Kuo, C.-C., 2012. Super-resolution texture synthesis using stochastic PAR/NL model. *Journal of Visual Communication and Image Representation* 23 (7), 995–1007.
- Chaigneau, A., Texier, M. L., Eldin, G., Grados, C., Pizarro, O., 2011. Vertical structure of mesoscale eddies in the eastern south pacific ocean : A composite analysis from altimetry and argo profiling floats. *Journal of Geophysical Research*, 116, C11025.
- Chainais, P., 2007. Infinitely divisible cascades to model the statistics of natural images. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence* 29 (12), 2105–2119.
- Chainais, P., Koenig, E., Delouille, V., Hochedez, J., 2011. Virtual super resolution of textured images using multifractal stochastic processes. *Journal of Mathematical Imaging and Vision* 39 (1), 28–44.
- Codling, E., Plank, M., Benhamou, S., 2007. Random walk models in biology. *J. R. Soc. Interface* 5, 813–834.
- Efros, A., Freeman, W., 2001. Image quilting for texture synthesis and transfer. *ACM SIGGRAPH*, 341–346.
- Fablet, R., Pujolle, S., Chessel, A., Benzinou, A., Cao, F., 2008. 2D image-based reconstruction of shape deformation of biological structures using a level-set representation. *Computer Vision and Image Understanding* 111(3) (3), 813–834.
- Fattal, R., 2007. Image upsampling via imposed edge statistics. *ACM SIGGRAPH* 26 (3), 95–102.
- Freeman, W. T., Jones, T. R., Pasztor, E. C., 2002. Example-based super-resolution. *IEEE Computer Graphics and Applications* 22 (2), 56–65.
- Freeman, W. T., Liu, C., 2011. Markov Random Fields for Super-resolution and Texture Synthesis. In A. Blake, P. Kohli, and C. Rother, (eds), *Advances in Markov Random Fields for Vision and Image Processing*. MIT Press, Chapter 10.
- Galerne, B., Gousseau, Y., Morel, J., 2011. Random phase textures : Theory and synthesis. *IEEE Transactions on Image Processing* 20 (1), 257–267.
- Glasner, D., Bagon, S., Irani, M., 2009. Super-resolution from a single image. In : *IEEE International Conference on Computer Vision*. Kyoto, Japan, 27 September - 4 October 2009.
- Heeger, D. J., Bergen, J. R., 1995. Pyramid based texture analysis/synthesis. *Proc. ACM SIGGRAPH*, 229–238.
- Hoyer, J. L., Shea, J., 2007. Optimal interpolation of sea surface temperature for the North sea and Baltic sea. *Journal of Marine Systems* 65 (1–4), 176–189.
- Mallat, S., 2008. *A Wavelet Tour of Signal Processing*. Academic Press.
- Mardia, K. V., Jupp, P. E., 1999. *Directional Statistics*. Wiley.
- Mandelbrot, B., 1983. *The fractal geometry of nature*.
- Monasse, P., Guichard, F., 2000. Fast computation of a contrast invariant image representation. *IEEE Transactions on Image Processing* 9 (5), 860–872.
- Newsam, G., Wegener, M., 1994. Generating non-Gaussian random fields for sea surface simulations. In : *IEEE International Conference on Acoustics, Speech, and Signal Processing*. Adelaide, Australia, 19-22 April 1994.
- Nguyen, H. G., Fablet, R., Boucher, J. M., 2012. Keypoint-based analysis of sonar images : application to seabed recognition. *IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing* 50 (4), 1171 – 1184.
- Pentland, A., 1984. Fractal-based description of natural scenes. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence* 6 (6), 661–674.
- Sali, E., Wolfson, H., 1992. Texture classification in aerial photographs and satellite data. *International Journal of Remote Sensing* 13 (18), 3395–3408.
- Tandeo, P., Ailliot, P., Autret, E., 2011. Linear gaussian state-space model with irregular sampling : application to sea surface temperature. *Stochastic Environmental Research and Risk Assessment*, pp. 1–12.
- Tuceryan, M., Jain, A., 1993. *Texture analysis*. Vol. 276. World Scientific.
- Varma, M., Zisserman, A., 2005. A statistical approach to texture classification from single images. *International Journal of Computer Vision* 62 (1-2), 61–81.
- Wentz, F., Gentemann, C., Smith, D., al., 2000. Satellite measurements of sea surface temperature through clouds. *Science*, 847–850.
- Xia, G. S., Delon, J., Gousseau, Y., 2010. Shape-based invariant texture indexing. *International Journal of Computer Vision* 88 (3), 382–403.